CHAPITRE 6

CARACTERISTIQUES STATIQUES DES PALIERS CIRCULAIRES EN REGIME LAMINAIRE

1 - INTRODUCTION

Les paliers lisses sont fréquemment utilisés ; les plus simples sont constitués d'un arbre cylindrique tournant à l'intérieur un alésage en présence de lubrifiant. Sur certains mécanismes, ils correspondent à la meilleure solution technologique existant actuellement. On les rencontre dans les moteurs thermiques, les compresseurs, les turbomachines, les alternateurs, les réducteurs, etc… La figure 1 présente différents coussinets de paliers circulaires.



Fig. 1 : Coussinets (Doc. LE COUSSINET MODERNE)

Un palier lisse est constitué de deux éléments, l'arbre généralement en acier de rayon R_a et le coussinet en bronze ou en acier régulé de rayon intérieur R_c et de longueur L. Ainsi, un palier lisse peut être schématisé par deux cercles de rayons voisins et caractérisé par trois grandeurs : le jeu radial $C = R_c - R_a$, le rapport C/R (ou jeu relatif de l'ordre de 10^{-3}) et le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier. La figure 2 présente les trois phases que l'on observe lors de la mise en route d'un palier sous charge. Les points 0_a et 0_c représentent respectivement les centres de l'arbre et du coussinet et W désigne la charge extérieure appliquée à l'arbre.

A l'arrêt, (fig. 2a), l'arbre et le coussinet sont en contact, la génératrice commune est opposée à la charge et la distance 0_c0_a est égale au jeu radial C.

Au démarrage, fig. 2.b, l'arbre roule en glissant à l'intérieur du coussinet, le régime de lubrification est dit mixte, le lubrifiant est entraîné dans l'espace convergent formé par l'arbre et le coussinet. Dès que la vitesse de rotation devient suffisante, il y a création d'un champ de pression hydrodynamique qui s'oppose à la charge (fig. 2c). Pour une vitesse de rotation

stable, et une charge W constante, le centre de l'arbre 0_a occupe une position fixe à l'intérieur du coussinet. Si le torseur des forces extérieures se réduit à une force unique $\vec{W}$ qui agit dans le plan de la section médiane du palier, les axes de l'arbre et du coussinet sont parallèles. Deux paramètres sont alors nécessaires pour positionner 0_a par rapport à 0_c. On utilise habituellement la distance 0_c0_a appelée excentricité e et l'angle que fait la direction de la charge $\vec{W}$ avec la ligne des centres $\overrightarrow{0_c 0_a}$ appelé angle de calage ϕ.

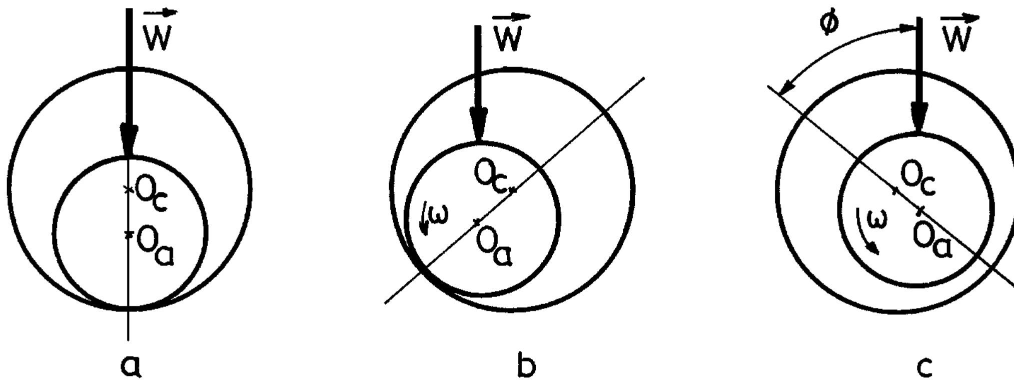


Fig. 2 : Schématisation d'un palier lisse

Dans ce chapitre, nous nous limiterons au régime hydrodynamique établi et nous supposerons que l'écoulement du fluide à travers le palier est isotherme, laminaire et permanent. Le processus de calcul des performances d'un palier peut être divisé en 4 parties :

- Ecriture de l'équation donnant l'épaisseur du film lubrifiant,
- Ecriture de l'équation de Reynolds correspondant au palier étudié,
- Définition des conditions aux limites sur la pression,
- Résolution des équations et calcul des performances.

2 - EQUATIONS DE BASE

2.1 - EPAISSEUR DU FILM LUBRIFIANT

Considérons une section droite du palier (fig 3a). Un point M appartenant à la surface du coussinet sera repéré par la coordonnée angulaire $\theta = \left(\overrightarrow{0_c A}, \overrightarrow{0_c M}\right)$; l'épaisseur du film d'huile est donnée par :

$$h = 0_cM - 0_cM' = R_c - 0_c M' = R_a + C - 0_c M'$$

En appliquant la règle des sinus au triangle $0_aM'0_c$ il vient :

$$\frac{0_a M'}{\sin\left(0_a 0_c M'\right)} = \frac{e}{\sin\alpha} = \frac{R_a}{\sin\left(M' 0_a 0_c\right)} = \frac{R_a}{\sin\left(\pi-\theta\right)} = \frac{R_a}{\sin\theta}$$

d'où

$$\sin\alpha = \frac{e}{R_a}\sin\theta \quad \text{et} \quad 0_c M' = \frac{R_a}{\sin\theta}\sin\left(0_c\, 0_a\, M'\right)$$

or

$$\left(0_c\, 0_a\, M'\right) = \theta - \alpha = \theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a}\sin\theta\right)$$

donc

$$0_c M' = \frac{R_a}{\sin\theta}\sin\left[\theta - \arcsin\left(\frac{e}{R_a}\sin\theta\right)\right]$$

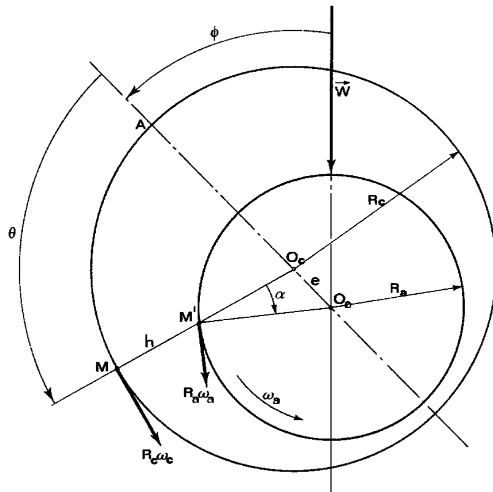


Fig. 3a : Section droite du palier

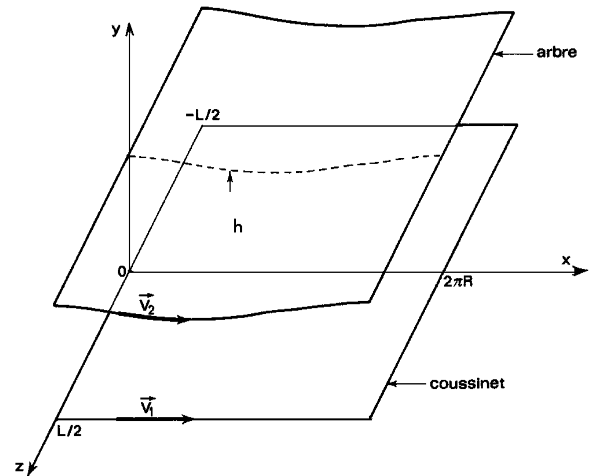


Fig. 3b : Palier développé

en développant le sinus il vient :

$$0_c M' = R_a\sqrt{1-\left(\frac{e}{R_a}\sin\theta\right)^2} - e\cos\theta$$

la quantité $e/R_a < C/R$ est très petite devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3}) on peut donc négliger le terme $\left(\frac{e}{R_a}\sin\theta\right)^2$ devant 1. L'épaisseur du film s'écrit alors :

$$h = C\left(1 + \varepsilon\cos\theta\right)$$

où l'excentricité relative : $\varepsilon = e/C$ varie de 0 à 1. Il faut remarquer que cette relation n'est valable que si $C/R \ll 1$.

2.2 - Equations de Reynolds

Les rayons R_a et R_c étant très voisins, on peut négliger la courbure du film, développer le coussinet (ou l'arbre) et l'assimiler à un plan (fig. 3b). Les conditions cinématiques relatives aux surfaces s'écrivent ;

$$U_1 = R_c\omega_c\,; \qquad V_1 = W_1 = 0$$
$$U_2 = R_a\omega_a\cos\alpha\,; \quad V_2 = R_a\omega_a\sin\alpha\,; \quad W_2 = 0$$

où α, angle entre O_cM' et O_aM', est la pente de la courbe h(x) :

$$tg\alpha = \frac{dh}{dx} = \frac{dh}{Rd\theta} = -\frac{e}{R}\sin\theta$$

la quantité e/R_a étant très petite, on peut effectuer un développement et se limiter au 1[er] ordre :

$$\cos\alpha \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin\alpha \approx \alpha \approx dh/dx$$

dans ces conditions les vitesses des surfaces s'écrit :

$$U_1 = R_c\omega_c$$
$$U_2 = R_a\omega_a\,; \qquad V_2 = R_a\omega_a\frac{dh}{dx}$$

Si on reporte les vitesses des surfaces du contact dans l'équation de Reynolds écrite en coordonnée cartésiennes et si on pose $R = R_a = R_c$, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu R(\omega_a + \omega_c)\frac{dh}{dx}$$

Remarques :

a) On a développé le coussinet et choisi ce dernier comme plan de référence ; un résultat identique aurait été obtenu en développant l'arbre.
b) Les vitesses angulaires ω_a et ω_c s'ajoutent. ainsi la portance est proportionnelle à la somme des vitesses. Si celles-ci sont égales et opposées, la portance de l'écoulement est nulle au second ordre près.

2.3 - CONDITIONS AUX LIMITES

Pour calculer le champ de pression, il faut résoudre l'équation de Reynolds sur le domaine représenté fig. 3b, compte tenu des conditions aux limites sur la pression :

$$-\text{ selon } z : \quad p\left(\theta, z = \frac{L}{2}\right) = P_1\,; \quad p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = P_2 \qquad \forall\theta$$
$$-\text{ selon } \theta : \quad p(\theta = 0, z) = p(\theta = 2\pi, z) \qquad \forall z$$

où P_1 et P_2 représentent les pressions extérieures aux extrémités du palier. si le palier possède des rainures d'alimentation en lubrifiant, il faut alors écrire les conditions aux limites correspondantes :

pour une rainure circonférentielle en z = 0 : $p(\theta, z = 0) = P_a$
pour une rainure axiale située à l'abscisse $\theta = \theta_a$: $p(\theta_a, a) = P_a$
pour une alvéole rectangulaire θ (θ_a, θ_b) et z (z_a, z_c) : $p = P_a$
où P_a est la pression dans la rainure ou dans l'alvéole.

De plus, comme la forme du film est convergeante puis divergente en fonction de θ, il peut y avoir rupture du film dans le divergent lorsque la pression devient inférieure à la

pression de vapeur saturante du fluide. Les conditions aux limites relatives à cette situation ont été présentées de façon générale, dans le chapitre 3.

Pour un palier hydrodynamique en fonctionnement stationnaire, trois types de conditions aux limites ont été successivement définies :

2.3.a - Conditions de Sommerfeld

Sommerfeld en 1904 [1] suppose que le film lubrifiant est continu et qu'il n'y a pas de rupture du film. Dans ces conditions la distribution de pression est antisymétrique par rapport au point $\theta = \pi$ et le lieu du centre de l'arbre dans le coussinet est une droite normale à la direction de charge.

Ces conditions aux limites ne sont valables que pour les paliers fonctionnant à de très faibles charges ou avec des pressions d'alimentation très élevées car sinon des pressions négatives apparaissent dans le film, ce qui est physiquement inacceptable.

2.3.b - Conditions de Gümbel

Gümbel en 1921 [2], à la suite des travaux de Sommerfeld, propose comme conditions aux limites :

$$p(\theta = o, z) = 0$$
$$p(\theta = \pi, z) = 0$$
$$p(\theta, z) = 0 \quad \text{si} \quad \pi < \theta < 2\pi$$

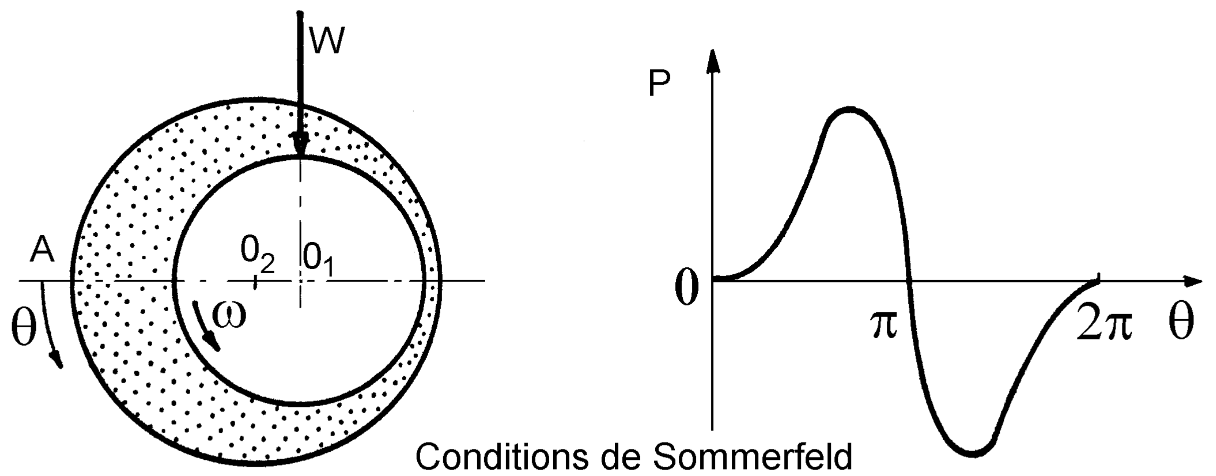
Cela revient à négliger, dans la solution de Sommerfeld les pressions négatives. Ces conditions impliquent une discontinuité dans l'écoulement au point $\theta = \pi$; elles ne sont pas acceptables physiquement mais sont utilisées dans le cas de l'approximation du palier court.

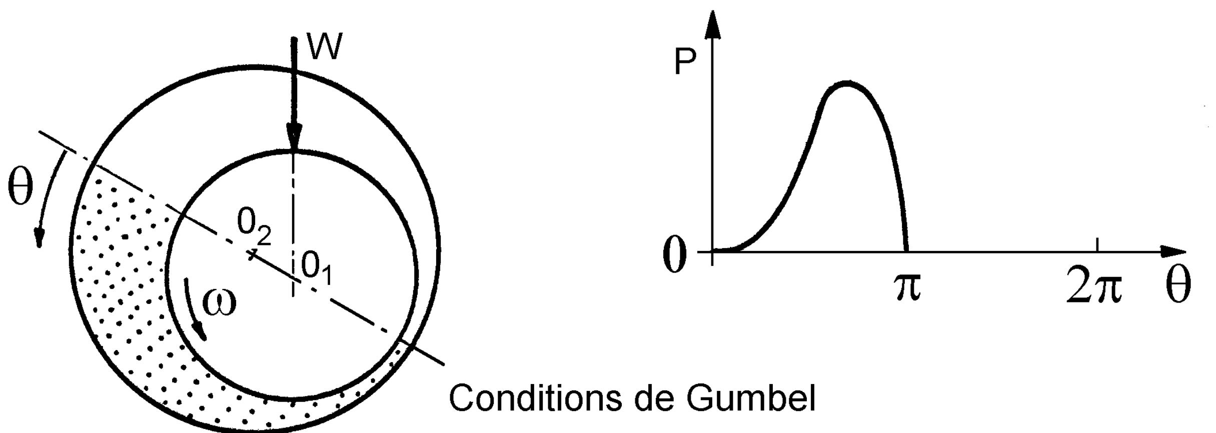
2.3.c - Conditions dites de Reynolds

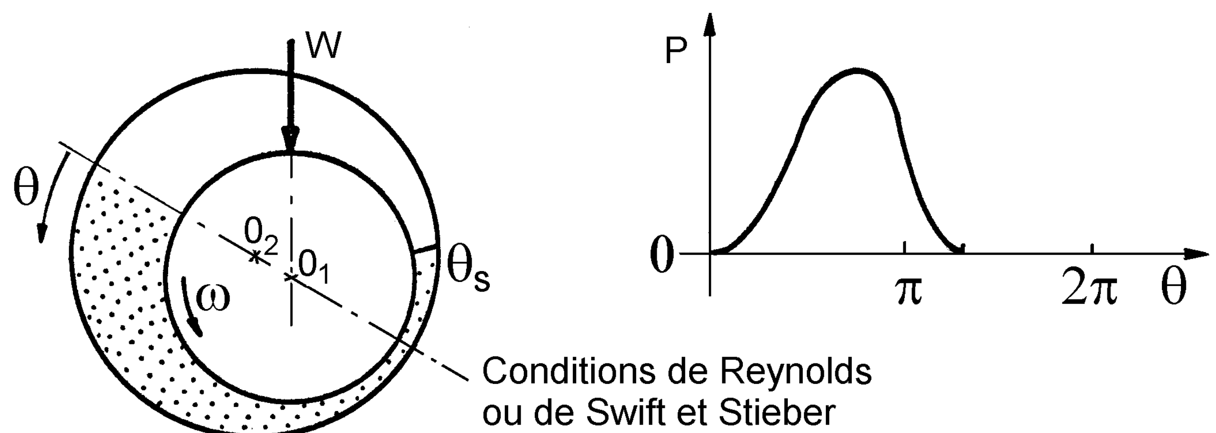
Ces conditions proposées indépendamment par Swift en 1932 [3] et par Steiber en 1933 [4], respectent la continuité du débit et supposent que pour une abscisse θ_s inconnue, la pression et le gradient de pression s'annulent :

$$p(\theta = 0, z) = 0$$
$$p(\theta = \theta_s, z) = 0$$
$$\frac{\partial p}{\partial \theta}(\theta = \theta_s, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(\theta = \theta_s, z) = 0$$
$$p(\theta, z) = 0 \quad \text{si} \quad \theta_s < \theta < 2\pi$$

On distingue ainsi deux régions dans le palier : une région active où la pression est positive et le film complet, pour des valeurs de θ comprises entre 0 et θ_s et une région inactive à pression nulle et dans laquelle en régime dynamique, peut apparaître de la cavitation, pour $\theta_s < \theta < 2\pi$. Ces conditions sont celles qui donnent les solutions les plus exactes ; elles ont été vérifiées dans de nombreuses études expérimentales.







Région active — Région inactive

Fig. 4 : Illustration des conditions aux limites dans un palier

2.4 - RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE REYNOLDS

L'équation de Reynolds est une équation aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique qui n'admet pas, sauf dans quelques cas simples, de solutions analytiques.

Sommerfeld [1] a résolu cette équation dans le cadre d'un problème plan ($\partial/\partial z = 0$) en négligeant l'écoulement axial, (hypothèse du "palier long"). Une autre solution unidimensionnelle, moins satisfaisante du point de vue analytique mais plus représentative du point de vue physique a été proposée par Ocvirk [4] dans le cas où la longueur du palier est très faible devant son diamètre ("palier court").

Pour les paliers de longueur finie, différentes méthodes de calcul ont été proposées : analogie électrique, méthodes variationnelles, développements en série et méthodes numériques. Les méthodes actuellement utilisées sont pour la plupart des méthodes numériques aux différences finies et aux éléments finis.

3 - LE "PALIER INFINIMENT LONG"

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est grand on peut négliger le débit axial. L'écoulement est donc purement circonférentiel. En pratique, ce calcul s'applique aux paliers tels que $L/D > 4$. Si seul l'arbre est animé d'un mouvement de rotation uniforme $\omega_a = \omega$ et $\omega_c = 0$, l'équation de Reynolds (5) se réduit à :

$$\frac{d}{dx}\left(h^3 \frac{dp}{dx}\right) = 6\,\mu\, R\omega \frac{dh}{dx}$$

ou en utilisant la coordonnée angulaire $\theta = \dfrac{x}{R}$:

$$\frac{d}{d\theta}\left(h^3 \frac{dp}{d\theta}\right) = 6\,\mu\, R^2\omega \frac{dh}{d\theta}$$

3.1 - SOLUTION DE SOMMERFELD

Supposons le palier alimenté à la pression $p = P_a$ par l'intermédiaire d'une rainure axiale de largeur nulle (infiniment mince) située à l'abscisse $\theta = 0$. Les conditions aux limites, connues sous le nom de conditions de Sommerfeld s'écrivent :

$$p\,(\theta = 0) = p\,(\theta = 2\pi) = P_a$$

Une première intégration de l'équation de Reynolds donne :

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\,\mu\, R^2\omega \frac{h - h^*}{h^3}$$

h* étant l'épaisseur du film lubrifiant au point où le gradient de pression est nul. En intégrant et en remplaçant h par sa valeur, on obtient :

$$p = 6\,\mu\,\omega\left(\frac{R}{C}\right)^2\left\{\int\frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^2} - \frac{h^*}{C}\int\frac{d\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}\right\} + K$$

où K est une constante d'intégration.

Pour calculer ces deux intégrales, on peut soit utiliser les tables présentées par Booker [5], et données en annexe I, soit utiliser le changement de variable de Sommerfeld défini par :

$$1+\varepsilon\cos\theta = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\psi}$$

soit

$$\cos\theta = \frac{\cos\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi} \qquad \sin\theta = \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi} \qquad d\theta = \frac{\left(1-\varepsilon^2\right)^{1/2}d\psi}{1-\varepsilon\cos\psi}$$

Dans ce cas, la pression s'écrit :

$$p = \frac{6\,\mu\,\omega\,(R/C)^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}\left\{\psi-\varepsilon\sin\psi-\frac{h^*\;2\psi-4\,\varepsilon\sin\psi+\varepsilon^2\,\psi+\varepsilon^2\sin\psi\cos\psi}{2C\left(1-\varepsilon^2\right)}\right\}+K$$

Les deux constantes h^* et K sont déterminées à partir des conditions aux limites sur la pression. Il vient :

$$K = P_a \quad ; \quad \frac{h^*}{C} = \frac{2\left(1-\varepsilon^2\right)}{2+\varepsilon^2}$$

soit :

$$p = \frac{6\,\mu\,\omega\,(R/C)^2}{\left(1-\varepsilon^2\right)^{3/2}}\left\{\psi-\varepsilon\sin\psi-\frac{2\psi-4\,\varepsilon\sin\psi+\varepsilon^2\,\psi+\varepsilon^2\sin\psi\cos\psi}{2+\varepsilon^2}\right\}+P_a$$

La figure 4a représente schématiquement l'allure de la courbe de pression. Celle-ci est antisymétrique par rapport au point $\psi = \pi$ (ou $\theta = \pi$). On remarque que, selon la valeur de la pression d'alimentation P_a, il peut y avoir ou non une région où la pression est négative.

Pour calculer la charge portante W et l'angle de calage ϕ, il faut intégrer le champ de pression sur la surface de l'arbre. Pour cela, on projette les forces de pression selon deux directions orthogonales $\vec{k}$ et $\vec{\ell}$ dont l'une est colinéaire à la ligne des centres (fig. 4b).

Si on néglige les contributions des contraintes tangentielles, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$W\cos\phi + L\int_0^{2\pi} p\cos\theta\,Rd\theta = 0$$

$$-W\sin\phi + L\int_0^{2\pi} p\sin\theta\,Rd\theta = 0$$

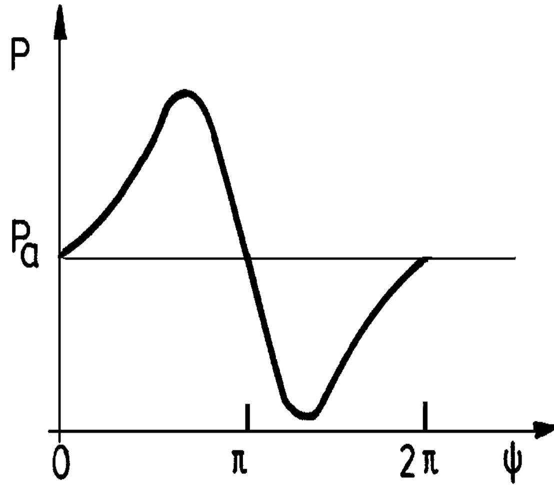


Fig. 4a : Allure de courbe de pression

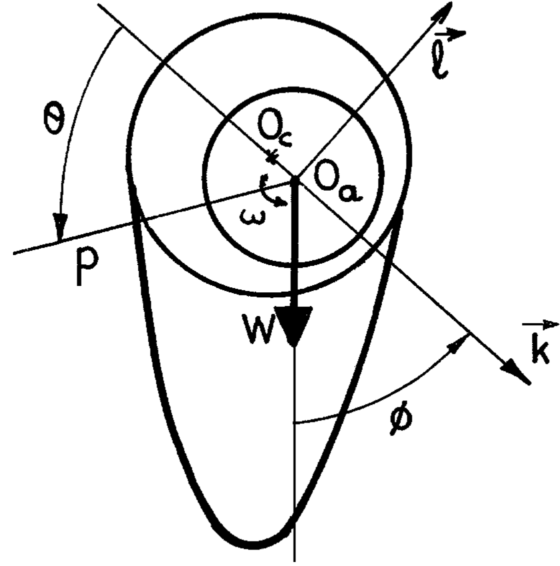


Fig. 4b : Section droite au palier

En intégrant par parties :

$$W \cos \phi = LR\int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \sin\theta \, d\theta$$

$$W \sin \phi = LR\int_0^{2\pi} \frac{dp}{d\theta} \cos\theta \, d\theta$$

pour calculer ces intégrales, on effectue le changement de variable donné précédemment. Il vient :

$$W \cos \phi = 0$$

$$W \sin \phi = \frac{12\,\mu\, R^3\, \omega\, L\, \pi\, \varepsilon}{C^2 \left(2+\varepsilon^2\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

d'où :

$$W = 12\,\mu\,\omega \frac{R^3 L}{C^2} \frac{\pi\,\varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

Il est d'usage en lubrification d'introduire le nombre sans dimension S appelé nombre de Sommerfeld :

$$S = \frac{\mu\, LR\omega}{\pi\, W}\left(\frac{R}{C}\right)^2 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\left(2+\varepsilon^2\right)}{12\,\pi^2\,\varepsilon}$$

La charge W, est par conséquent, le nombre de Sommerfeld S, sont indépendants de la pression d'alimentation P_a car celle-ci intervenant comme une constante dans la valeur de la pression admet une résultante nulle après intégration autour de l'arbre. La figure 5 présente les variations de la charge sans dimension $\overline{W}$ en fonction de l'excentricité relative ε. L'angle de

calage ϕ est toujours égal à π/2. Cela signifie que le centre de l'arbre se déplace selon une direction normale à la ligne de charge. On peut montrer qu'un tel palier est toujours dynamiquement instable.

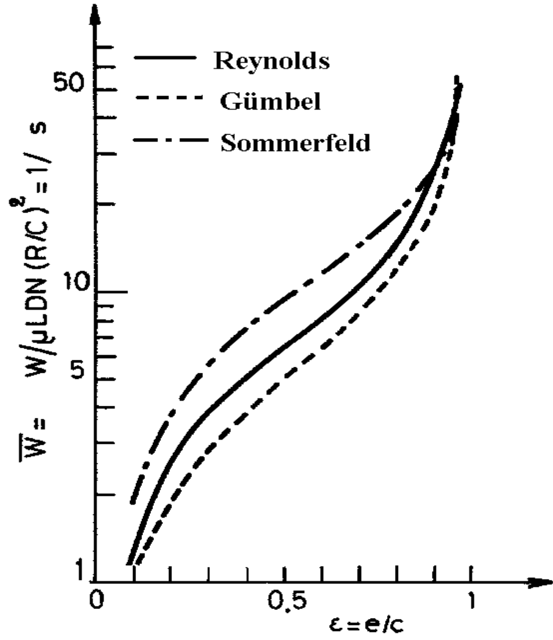


Fig.5a : Variation de la charge sans dimension $\overline{W}$ en fonction de l'excentricité relative ε

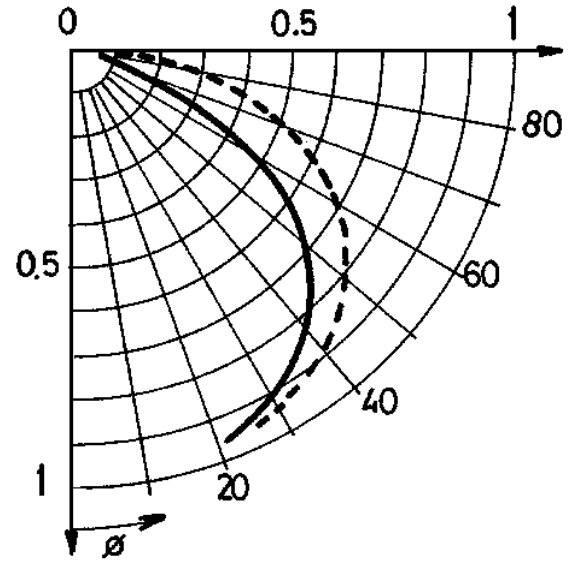


Fig.5b : Variation de l'angle de calage ϕ en fonction de l'excentricité relative ε

Fig. 5 : Influence des conditions aux limites

Le couple de frottement est obtenu par intégration des contraintes de cisaillement à la surface de l'arbre.

$$\mathcal{C}_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \tau_{xy}\left(y = h\right) d\theta$$

avec

$$\tau_{xy} = \mu \frac{du}{dy} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\; y\left(y - h\right) + \frac{R\omega\, y}{h}$$

d'où

$$\tau_{xy} = \mu \frac{R\omega}{h} + \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\left(2y - h\right)$$

Le couple s'écrit :

$$\mathcal{C}_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \left\{\mu \frac{R\omega}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx}\right\} d\theta$$

soit encore :

$$\mathcal{C}_a = R^2 L \int_0^{2\pi} \left\{ \mu \frac{R\omega}{h} + \frac{C}{2R}\frac{dp}{d\theta} + \frac{e\cos\theta}{2R}\frac{dp}{d\theta} \right\} d\theta$$

La valeur de la première intégrale est immédiate à partir des tables données par BOOKER [5]. La deuxième intégrale est nulle, tandis qu'en intégrant par parties on reconnaît dans la troisième intégrale, l'expression $\frac{e}{2} W \sin\phi$. Le couple de frottement sur l'arbre s'écrit donc :

$$\mathcal{C}_a = \frac{R^3 \mu \omega L}{C} \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{e}{2} W \sin\phi$$

soit compte tenu de l'expression de la charge :

$$\mathcal{C}_a = \frac{4 \mu \omega R^3 L \pi}{C} \left[\frac{1 + 2\varepsilon^2}{\left(2 + \varepsilon^2\right)\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right]$$

Les variations du couple sans dimension $\overline{C}_a = \mathcal{C}_a / (_ L D N R (R/C))$ en fonction de l'excentricité relative ε sont présentées fig. 6c. Un calcul semblable au précédent permet de déterminer le couple de frottement sur le coussinet.

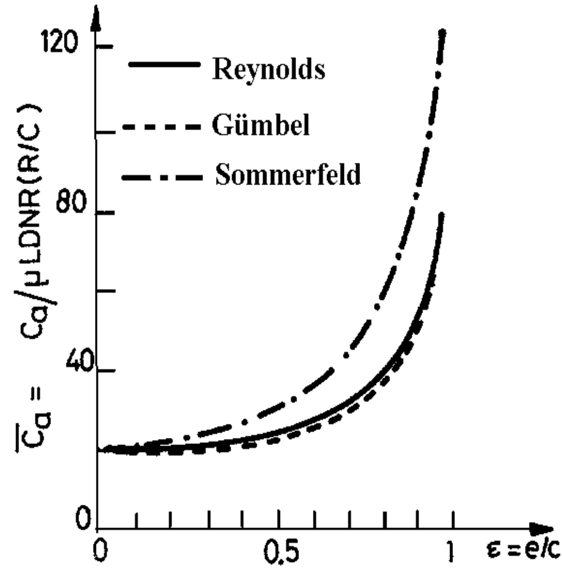


Fig. 6 : variations du couple sans dimension $\overline{C}_a$ en fonction de l'excentricité relative ε : Influence des conditions aux limites. Cas du palier infiniment long

$$\mathcal{C}_a = \frac{R^3 \mu \omega L}{C} \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{e}{2} W \sin\phi$$

soit

$$\mathcal{C}_a = \frac{4\pi\mu \omega R^3 L}{C} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2+\varepsilon^2}$$

On remarque que :

$$\mathcal{C}_a - \mathcal{C}_c = e W \sin\phi$$

Cette relation traduit l'équilibre du palier.

Le coefficient de frottement relatif à l'arbre est :

$$f_a = \mathcal{C}_a/(RW) = \frac{C}{R}\left\{ \frac{\varepsilon}{2}\sin\phi + \frac{2\pi^2 S}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \right\}$$

Afin d'éliminer le rapport C/R, on utilise le nombre de frottement :

$$f = \mathcal{C}_a/(CW) = \frac{R}{C} f_a = 2\sin\phi + \frac{2\pi^2 S}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{1+2\varepsilon^2}{3\varepsilon}$$

3.2 - SOLUTION DE GÜMBEL

La solution de Sommerfeld n'est valable que pour des paliers très faiblement chargés ou alimentés sous forte pression car sinon on obtient des pressions négatives dans le film lubrifiant. A la suite des travaux de Sommerfeld, Gümbel propose de négliger les pressions négatives. Ceci introduit une discontinuité du débit dans le film (chapitre 4). Bien que physiquement et mathématiquement inacceptable, cette solution est fréquemment employée car elle permet d'obtenir dans le cas du "palier court" par exemple, une solution proche des résultats expérimentaux et elle conserve à l'équation de Reynolds son caractère linéaire.

Dans le cas d'un "palier long" alimenté à l'abscisse $\theta = 0$ avec une pression d'alimentation égale à la pression atmosphérique, c'est-à-dire $P_a = 0$, il vient :

$$W \cos\phi = -12\,\mu\,\omega\, RL\,(R/C)^2 \frac{2}{\left(1-\varepsilon^2\right)\left(2+\varepsilon^2\right)}$$

$$W \sin\phi = 6\,\mu\,\omega\, RL\,(R/C)^2 \frac{\varepsilon\,\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(2+\varepsilon^2\right)}$$

Soit encore :

$$W = \frac{6\,\mu\,\omega\, RL\,\left(R/C\right)^2 \varepsilon}{\left(2+\varepsilon^2\right)\left(1-\varepsilon^2\right)} \sqrt{4\varepsilon^2 + \pi^2\left(1-\varepsilon^2\right)}$$

$$\phi = \mathrm{arctg}\,\frac{\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\,\varepsilon}$$

Les variations de la charge $\overline{W}$ et de l'angle de calage ϕ en fonction de l'excentricité relative sont présentées sur les figures 5a et 5b. Le calcul du couple résistant est effectué en intégrant les contraintes de cisaillement sur l'arbre. Cependant, l'existence d'une zone active remplie d'huile ($0 < \theta < \pi$) et d'une zone inactive ($\pi < \theta < 2\pi$) partiellement vide oblige à décomposer le calcul du couple en deux parties. Pour cela, on suppose que dans la zone inactive, le débit circonférentiel reste constant et égal à celui calculé à la sortie de l'arc actif, c'est-à-dire dans ce cas à l'abscisse $\theta = \pi$. Cette hypothèse permet de définir une largeur équivalente L' définie par la relation :

$$Q_c = \frac{R\,\omega\, h\left(\theta=\pi\right) L}{2} = \frac{R\,\omega\, h\left(\theta\right) L'}{2}$$

où $L' = \dfrac{L\,h_s}{h}$ si h_s représente l'épaisseur du film à l'abscisse $\theta = \pi$.

Il vient ainsi :

$$\mathcal{C}_a = R^2\, L \left\{ \int_0^{\pi} \left[\frac{\mu\, R\,\omega}{h} + \frac{h}{2}\frac{dp}{dx} \right] d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mu\, R\,\omega\, h_s}{h^2}\, d\theta \right\}$$

soit après intégration :

$$\mathcal{C}_a = \frac{\pi \mu \omega R^3 L}{C \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} \right\}$$

et

$$\mathcal{C}_c = \frac{\pi \mu \omega R^3 L}{C \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon} - \frac{3\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} \right\}$$

Les variations du couple de frottement sur l'arbre $\mathcal{C}_a$ sont présentées sur la figure 6.

3.3 - SOLUTION DITE DE REYNOLDS

Pour des conditions d'alimentation identique à celles utilisées précédemment, c'est-à-dire une pression d'alimentation nulle à l'abscisse $\theta = 0$ (ou $\psi = 0$), nous savons que, s'il y a rupture du film lubrifiant, la continuité du débit impose la continuité du gradient de pression le long de la frontière $\sum^+$ qui sépare la zone active ($p > 0$) de la zone inactive ($p = 0$) (chapitre 4). Dans le cas unidimensionnel, cette condition s'écrit :

$$p(\theta = \theta_s) = \left(\frac{dp}{d\theta} \right)_{(\theta=\theta_s)} = 0$$

où θ_s est l'abscisse du début de la région inactive. Sa valeur est une inconnue du problème.

Dans le cas envisagé, la frontière $\sum^-$ où le film se reconstitue est connue. Celle-ci est située sur la rainure d'alimentation.

Les deux constantes d'intégration qui apparaissent dans l'équation de pression sont donc déterminées à partir de deux conditions aux limites :

$$P(\theta = 0) = 0 \text{ ou } p(\psi = 0) = 0$$

$$P(\theta = 0_s) = \left(\frac{dp}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_s} = 0 \text{ ou } p(\psi = \psi_s) = \left(\frac{dp}{d\psi} \right)_{\psi=\psi_s} = 0$$

On obtient alors le champ de pression :

$$p(\psi) = \frac{6 \mu R^2 \omega}{C^2 (1-\varepsilon^2)^{3/2}} \left[\psi - \varepsilon \sin\psi - \frac{2\psi - 4\varepsilon \sin\psi + \varepsilon^2 \psi + \varepsilon^2 \sin\psi \cos\psi}{2(1 - \varepsilon \cos\psi_s)} \right]$$

où ψ_s, qui correspond à l'abscisse de rupture du film d'huile, est défini par la relation :

$$\varepsilon (\sin\psi_s \cos\psi_s - \psi_s) + 2(\sin\psi_s - \psi_s \cos\psi_s) = 0$$

par intégration du champ de pression la charge s'écrit :

$$W = 3\mu\, R\omega L \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(1-\varepsilon\cos\psi_s\right)} \sqrt{\frac{\varepsilon^2\left(1-\cos\psi_s\right)^4}{1-\varepsilon^2} + 4\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)^2}$$

l'angle de calage est donné par :

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{2\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)}{\varepsilon\left(1-\cos\psi_s\right)^2}$$

le nombre de Sommerfeld S s'écrit alors :

$$S = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(1-\varepsilon\cos\psi_s\right)}{3\pi\sqrt{\frac{\varepsilon^2\left(1-\cos\psi_s\right)^4}{1-\varepsilon^2} + 4\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)^2}}$$

Le couple de frottement est obtenu par l'intégration des contraintes de cisaillement sur la surface de l'arbre, ou du coussinet. Comme précédemment, le domaine est séparé en une zone active ($0 < \psi < \psi_s$) et une zone inactive ($\psi_s < \psi < 2\pi$).

Sur l'arbre le couple s'écrit :

$$\mathcal{C}_a = \frac{\mu\, R^3\omega\, L}{C}\left[\frac{2\pi + \varepsilon\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(1-\varepsilon\cos\psi_s\right)}\right] + \frac{e}{2}\, W\sin\phi$$

sur le coussinet :

$$\mathcal{C}_c = \frac{\mu\, R^3\omega\, L}{C}\left[\frac{2\pi + \varepsilon\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(1-\varepsilon\cos\psi_s\right)}\right] - \frac{e}{2}\, W\sin\phi$$

Le nombre de frottement relatif à l'arbre est donné par la relation :

$$f = \mathcal{C}_a/(CW) = \pi S\left[\frac{2\pi + \varepsilon\left(\sin\psi_s - \psi_s\cos\psi_s\right)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\left(1-\varepsilon\cos\psi_s\right)}\right] - \frac{\varepsilon}{2}\,\sin\phi$$

3.4 - COMPARAISON

Les résultats obtenus avec les conditions aux limites de Sommerfeld, de Gümbel et de Reynolds sont présentés sur la figure 6. On remarque que les solutions de Gümbel et de Reynolds sont voisines, l'écart le plus faible est obtenu pour les grandes excentricités, ce qui est tout à fait logique car dans la solution de Reynolds, l'abscisse de rupture du film lubrifiant tend vers π lorsque l'excentricité relative ε tend vers 1. La figure 6 montre que l'effet du gradient de pression sur le couple ne devient sensible que pour des excentricités relatives supérieures à 0,5.

3.5 - CAS D'UNE POSITION QUELCONQUE DE LA RAINURE D'ALIMENTATION

Dans la situation envisagée précédemment, nous avons supposé que la rainure d'alimentation était située au point d'épaisseur maximale du film lubrifiant. Cette hypothèse qui simplifie les calculs, n'est pas réaliste car dans la pratique la rainure d'alimentation est fixe vis-à-vis de la direction de la charge (on ne s'intéresse qu'au cas stationnaire).

Considérons le cas d'une alimentation sous pression nulle par une rainure d'alimentation située à φ degrés en aval de la direction de la charge (fig. 7).

Les solutions obtenues à partir des conditions aux limites de Sommerfeld ou de Gümbel ne sont physiquement pas acceptables car elles impliquent soit de l'existence de pressions négatives, soit une discontinuité dans le débit. La solution correcte est celle qui fait intervenir les frontières de rupture $\left(\sum^{+}\right)$ et la reconstitution $\left(\sum^{-}\right)$ du film lubrifiant.

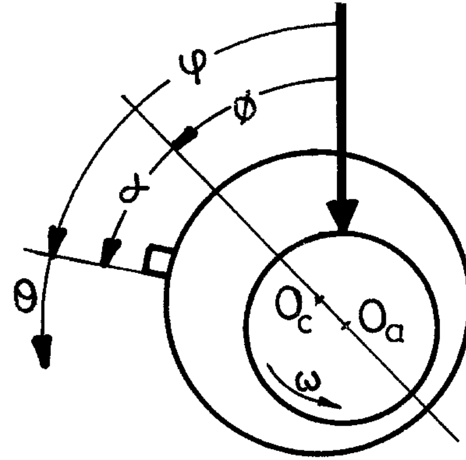


Fig.7 : Position de la rainure d'alimentation

Ce problème a été traité de manière rigoureuse [6]. Nous ne rappellerons ici que les principaux résultats. On choisit l'origine de la coordonnée circonférentielle à la rainure d'alimentation ; l'épaisseur h du film lubrifiant est alors donnée par :

$$h(\theta) = C\,[1+\varepsilon \cos(\theta+\alpha)]$$

où

$$\alpha = \varphi - \phi \quad ; \quad \theta \in (0, 2\pi) \quad ; \quad \alpha \in (0, 2\pi) \quad \text{et} \quad \varepsilon \in (0, 1)$$

A la rainure d'alimentation et pour une pression d'alimentation égale à la pression atmosphérique nous avons :

$$p(0) = p(2\pi) = 0$$

Dans la région active Ω_+ la pression est positive et est obtenue à partir de l'équation de Reynolds :

$$\frac{d}{d\theta}\left(h^3 \frac{dp}{d\theta}\right) = 6\,\mu\,R^2\omega\,\frac{dh}{d\theta}$$

Dans la région inactive Ω_0 la pression est nulle ($p = 0$), la conservation du débit massique impose :

$$\frac{d}{d\theta}\left[\beta(\theta)\,h(\theta)\right] = 0 \quad \text{soit } \beta h = K = \text{Cste}$$

les conditions aux limites pour la frontière de rupture $\sum^{+}$ s'écrivent :

$$p = \frac{dp}{d\theta} = 0\,;\,\beta = 1$$

Les conditions aux limites pour la frontière de réformation $\sum^-$ sont :

$$p = 0;\ h\, R\omega\,(1-\beta) = -\frac{h^3}{6\,\mu\, R}\,\frac{dp}{d\theta}$$

Un certain nombre de résultats ressortent de ces expressions [4, 5] :

a) la région active Ω_+ est toujours connexe $\Omega_+ = (\theta_i, \theta_s)$;
b) pour résoudre le problème $\beta\,(\theta)$ doit être donné en un point de Ω_0. La connaissance de β entraîne celle du débit massique par unité de longueur dans Ω_0 : $\rho\beta\,\frac{h\,R\,\omega}{2}$. On choisit le point $\theta = 0$;
c) $\beta(0)$ ne peut être quelconque. Si $\beta(0)$ est trop important, la condition a) n'est pas respectée ; si $\beta(0)$ est trop petit, la pression ne peut s'établir. On a :

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon\cos\alpha} < \beta(0) < 1$$

Compte tenu de ces remarques, le champ de pression est alors facilement obtenu. En effet, si $\beta(0)\,h(0)$ est donné on en déduit immédiatement l'abscisse θ_s de rupture du film :

$$h(\theta_s) = \beta(0)\,h(0)$$

puis le champ de pression par une intégration numérique de :

$$\frac{dp}{d\theta} = 6\,\mu\,R^2\omega\,\frac{h(0)-h(\theta_s)}{h^3(\theta)} \quad \text{pour} \quad \theta \in (-\infty, \theta_s)$$

avec $p(\theta_s) = 0$

L'abscisse $\theta = \theta_i$ de réformation du film est le premier point où $p(\theta) = 0$.

Les résultats numériques montrent que si l'abscisse de rupture θ_s dépend peu de la valeur de $\beta(0)$, il en est tout autrement de l'abscisse de réformation θ_i [6] ; cela signifie que, dans le cas d'une pression d'alimentation égale à la pression ambiante, le début de l'arc actif est conditionné par la valeur du débit d'alimentation. L'emploi des conditions aux limites dites de Reynolds, associé à l'algorithme de Christopherson (chapitre 3) n'impose pas de se fixer le débit, celui-ci est un résultat de calcul. Physiquement, cela revient à supposer que l'on est capable de fournir au palier toute la quantité de fluide nécessaire. Une comparaison [7] des résultats obtenus avec ces deux types de conditions aux limites montre que la charge portante est peu modifiée tant que la rainure d'alimentation est située dans la zone non chargée du palier (grand jeu) à condition de prendre pour $\beta(0)$ la valeur maximale possible.

Si la formulation du problème est simple pour le cas unidimensionnel, il en est tout autrement dans le cas bidimensionnel pour lequel, le problème n'est encore que partiellement traité [8].

4 - LE "PALIER COURT"

Lorsque le rapport L/D de la longueur au diamètre du palier est faible, on peut négliger le gradient de pression circonférentiel devant le gradient de pression axial. Cette hypothèse émise pour la première fois de Michell [9] a été reprise et développée par Ocvirk et Dubois [4]. Elle est entièrement justifiée pour les paliers dont le rapport L/D est inférieur ou égal à 1/8. En pratique cette hypothèse est encore utilisée pour des rapports L/D de 0,5 car l'erreur commise reste faible sur le couple et le débit, elle est d'un ordre de grandeur acceptable sur la charge mais très importante sur la valeur du maximum de pression dans le film. Ces erreurs diminuent lorsque l'excentricité décroît.

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,\mu\, R\omega \frac{dh}{dx}$$

soit encore :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,\mu\,\omega \frac{dh}{d\theta}$$

Avec les conditions aux limites

$$p\left(\theta, z = -\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad p\left(\theta, z = +\frac{L}{2}\right) = 0$$

Le champ de pression s'écrit :

$$p\,(\theta, z) = -\frac{3\,\mu\,\omega}{C^2}\left(z^2 - \frac{L^2}{4}\right)\frac{\varepsilon \sin\theta}{(1+\varepsilon\cos\theta)^3}$$

Il est évident que la pression varie comme $\sin\theta$; elle est positive pour $\theta \in (0, \pi)$. Pour obtenir la charge, Ocvirk et Dubois utilisent les conditions aux limites de Gümbel ; il vient :

$$W = \mu\, LR\omega \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left(\frac{R}{C}\right)^2 \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^2}\sqrt{16\,\varepsilon^2 + \pi^2\,(1-\varepsilon^2)}$$

Le nombre de Sommerfeld est tel que :

$$S = \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{\pi\,\varepsilon\sqrt{16\,\varepsilon^2 + \pi^2(1-\varepsilon^2)}}$$

et l'angle de calage :

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

Le couple de frottement calculé en tenant compte des zones active et inactive du palier, est donné par la relation :

$$C_a = \frac{\mu\,\omega\,R^3 L}{C}\,\frac{\pi\,(2+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

et le nombre de frottement sur l'arbre s'écrit :

$$f = C_a/(CW) = \frac{\partial_2\,S\,(2+å)}{(1+å)\sqrt{1-å^2}}$$

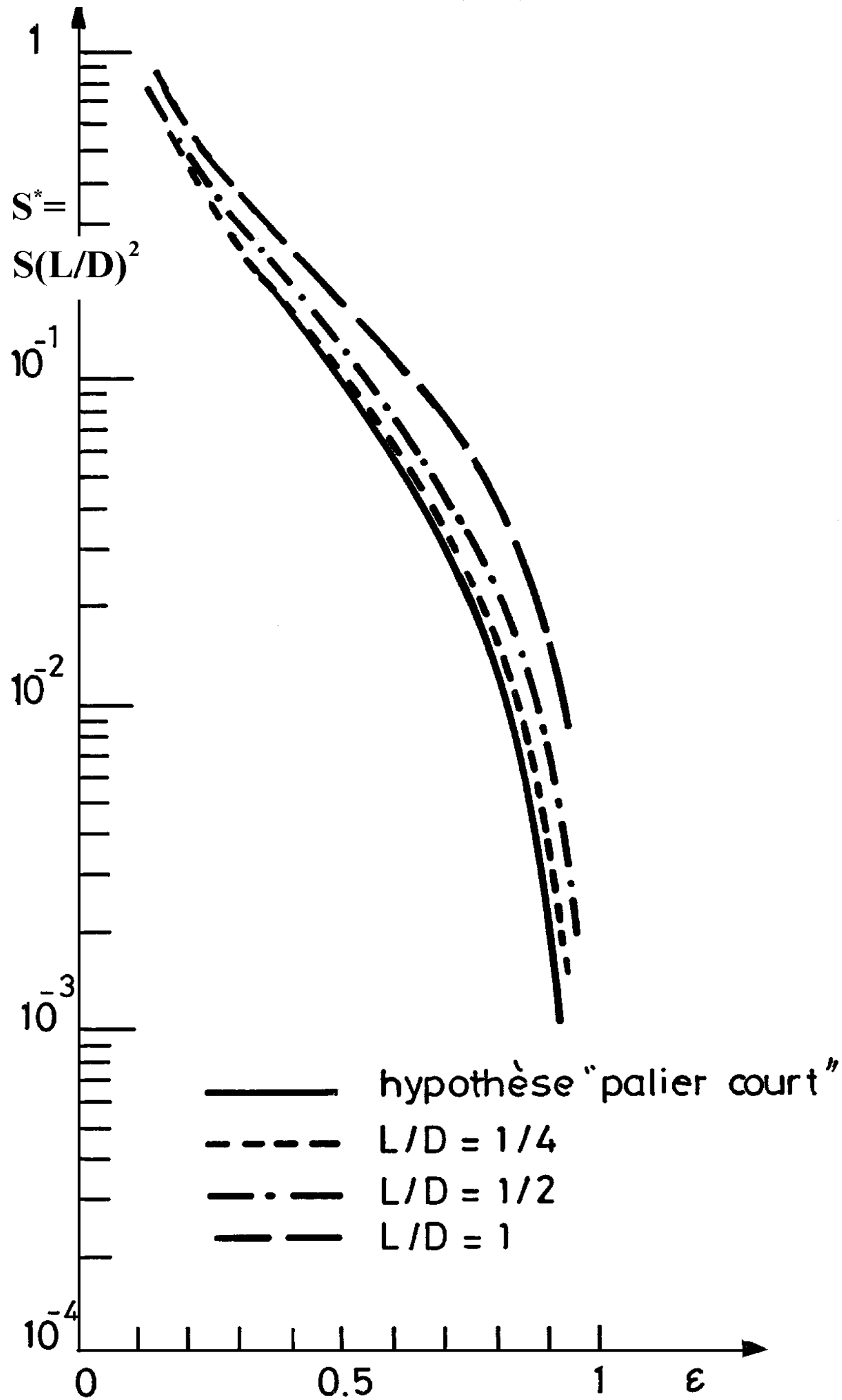


Fig. 8 : Validité de l'hypothèse "palier court"

Le débit axial est :

$$Q_z = L\,C\,V\,\varepsilon$$

ce qui justifie l'emploi d'un débit sans dimension

$$\overline{Q} = Q / L\,C\,V = \varepsilon$$

On remarque que le nombre de Sommerfeld et le nombre de frottement sont fonction du rapport $(L/D)^2$; ainsi, si l'on veut représenter sur un seul tableau les caractéristiques du palier, il est nécessaire de considérer les nombres modifiés de Sommerfeld et de frottement :

$$S^* = S\left(\frac{L}{D}\right)^2$$

$$f^* = \left(\frac{L}{D}\right)^2 f$$

Les courbes de la figure 8 mettent en évidence les écarts commis sur le nombre de Sommerfeld S^* c'est à dire sur la charge adimensionnée, lorsque cette hypothèse est retenue.

5 - LE PALIER DE LONGUEUR FINIE

Dans le cas général, la difficulté d'obtenir une solution satisfaisante pour un palier n'est pas seulement dus à la forme de l'équation de Reynolds mais également aux conditions aux limites car le lubrifiant n'est pas toujours admis par l'intermédiaire d'une rainure axiale à pression ambiante. Considérons un palier lisse alimenté par une rainure axiale pratiquée sur la ligne des centres dans la section d'épaisseur maximum du film.

L'équation de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3\,\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\,\mu\,R\omega\,\frac{dh}{dx}$$

Cette équation n'admet pas de solution analytique ; diverses méthodes approchées ont été proposées. La plupart sont dérivées des approches infiniment court ou infiniment long [10 à 13] et ne permettent pas d'appliquer les conditions aux limites de Reynolds. Leur utilisation est souvent limitée aux arcs partiels. Rohde et Li [14] ont proposé une approche qui permet de réduire l'équation de Reynolds à une équation différentielle du second ordre en x. Utilisant le fait que la répartition de pression dans la direction axiale est parabolique dans le cas du palier court et reste encore quasi-parabolique dans le cas du palier de longueur finie, il posent :

$$p(\theta, z) = f(\theta)\left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{L}\right)^2\right]$$

et reportent cette relation dans la fonctionnelle associée à l'équation de Reynolds. L'intégration par rapport à z, puis l'application du calcul des variations, conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{d}{d\theta}\left[\frac{h^3}{6\mu}\frac{df}{d\theta}\right]-\frac{10}{6}R^2h^3f(\theta)=5\,\omega\frac{dh}{d\theta}$$

Cette équation doit être intégrée numériquement. Il est possible d'utiliser les conditions aux limites de Reynolds. Cette approche donne d'excellents résultats dans le cas des paliers circulaires, ou des arcs partiels, en régimes permanent et même en régime transitoire. Les résultats présentés sur le tableau 1 concernent le cas du palier circulaire en régime permanent ; l'erreur effectuée sur la portance est donnée en %.

Tableau 1 : Approche de Rhode et Li [12]. Cas du palier circulaire : erreur sur la portance (%)

L/D \ ε	0,5	0,8	0,95
0,5	~ 0	~ 0	~ 0
1	~ 0	1	5
2	1	4	6

Si l'on souhaite une plus grande précision, ou si la forme du palier ne permet pas de faire l'hypothèse d'une pression parabolique. Il est nécessaire de faire appel aux méthodes numériques. La plus simple est la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et également employée.

Si on reporte dans l'équation de Reynolds les variables sans dimension suivantes :

$$\theta = x/R, \quad Z = z/L, \quad \bar{h} = h/C \quad \text{et} \quad P = p/6\,\mu\,\omega\,(R/C)^2$$

Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\bar{h}^3\frac{\partial P}{\partial\theta}\right)+\left(\frac{R}{L}\right)^2\frac{\partial}{\partial Z}\left(\bar{h}^3\frac{\partial P}{\partial Z}\right)=\frac{d\bar{h}}{d\theta}$$

Cette équation ne fait intervenir que deux paramètres : l'excentricité relative ε et le rapport R/L c'est à dire L/D. Dans le tableau 2 et sur les courbes des figures 9 à 12, nous avons présenté les variations du nombre de Sommerfeld, de l'angle de calage, du nombre de frottement, du débit axial, de la charge et du couple relatif à l'arbre en fonction de l'excentricité relative ε pour différents rapports L/D. Ces résultats sont insuffisants pour dessiner un palier car il faut aussi faire intervenir les données de la résistance des matériaux, étudier la stabilité, prendre en considération les effets thermiques etc.... Cependant, ils permettent de faire un avant projet et d'obtenir un ordre de grandeur pour le débit, les pertes par cisaillement et la température moyenne du lubrifiant. Ces résultats découlent d'une résolution numérique de l'équation de Reynolds par la méthode des différences finies. Le système linéaire obtenu est inversé de manière itérative en utilisant l'algorithme de Gauss-Seidel avec surrelaxation ; les conditions aux limites sont celle dites de Reynolds.

Tableau 2 : Caractéristiques des paliers lisses circulaires alimentés à pression atmosphérique et dont la rainure axiale est située sur la ligne des centres

Notations (rappel)

C Jeu radial $C = R_2 - R_1$ (m)
D Diamètre du palier (m)
L Longueur du palier (m)
N Vitesse de rotation de l'arbre (t/s)
Q Débit axial (m^3/s)
R Rayon du palier (m)
$V = \omega R$ Vitesse linéaire de l'arbre (m/s)

W Charge appliquée N
ε Excentricité relative $\varepsilon = e/C$
ϕ Angle de calage
μ Viscosité dynamique (Pa s)
ω Vitesse angulaire de l'arbre (rd/s)
$\mathcal{C}_a$ Couple de frottement sur l'arbre (mN)

$\bar{\mathcal{C}}_a$ Couple de frottement adimensionné sur l'arbre $\bar{\mathcal{C}}_a = \mathcal{C}_a C / (\mu LDNR^2) = \frac{1}{S}\frac{R}{C} f_a = \frac{f}{S}$

f Nombre de frottement sur l'arbre $f = \frac{R}{C} f_a = \mathcal{C}_a/(CW)$

f_a Coefficient de frottement sur l'arbre $f_a = \mathcal{C}_a/(RW)$

$\bar{Q}$ Débit axial sans dimension $\bar{Q} = Q/(LCV)$

S Nombre de Sommerfeld $S = \frac{\mu LV}{\pi W}\left(\frac{R}{C}\right)^2 = \frac{\mu LDN}{W}\left(\frac{R}{C}\right)^2$

"Palier court" : L/D ≤ 1/8

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$S\left(\frac{L}{D}\right)^2$	0,99	0,461	0,272	0,17	0,106	0,0625	0,033	0,0139	0,00331	0,000812
ϕ	83	75	68	61	54	47	39	31	21	15
$\frac{R}{C} f_a \left(\frac{L}{D}\right)^2$	18,75	8,514	4,98	3,14	2,016	1,25	0,722	0,355	0,114	0,0388
$\bar{\mathcal{C}}_a$	18,94	18,47	18,31	18,5	19,02	20,02	21,89	25,55	34,58	47,79

L/D = 1/4

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
S	16,2	7,57	4,49	2,83	1,78	1,07	0,58	0,263	0,0728	0,0221
ϕ	82,5	75,5	68,5	61,5	54	47	39,5	31,5	21,5	15,5
$\frac{R}{C} f_a$	307	140	82,5	52,67	34,26	21,85	13,18	6,97	2,70	1,20
Q/(LCV)	0,0983	0,196	0,295	0,393	0,491	0,590	0,688	0,787	0,885	0,933
$\bar{\mathcal{C}}_a$	18,95	18,49	18,37	18,61	19,24	20,42	22,74	26,5	37,09	54,3

L/D = 1/2

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
S	4,32	2,03	1,21	0,784	0,508	0,3180	0,184	0,0912	0,0309	0,0116
ϕ	82	75	68,5	61,53	55	48	41	33	23,5	17
$\frac{R}{C} f_a$	82,10	37,71	22,55	14,75	9,94	6,67	4,33	2,59	1,27	0,70
Q/(LCV)	0,0938	0,187	0,281	0,374	0,468	0,562	0,657	0,751	0,845	0,890
$\bar{\mathcal{C}}_a$	19	18,57	18,64	18,81	19,57	20,97	23,53	28,4	41,1	60,34

L/D = 1

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
S	1,33	0,631	0,388	0,260	0,178	0,120	0,0776	0,0443	0,0185	0,00831
ϕ	79,5	74	68	62,5	56,5	50,5	44	36	26	19
$\frac{R}{C} f_a$	25,36	11,87	7,35	5,07	3,67	2,70	1,99	1,40	0,859	0,563
Q/(LCV)	0,0801	0,159	0,237	0,314	0,390	0,466	0,542	0,616	0,688	0,721
$\bar{\mathcal{C}}_a$	19,06	18,81	18,94	19,5	20,62	22,5	25,64	31,6	46,43	67,75

L/D = 2

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
S	0,559	0,271	0,173	0,122	0,0893	0,0654	0,0463	0,0297	0,0143	0,00707
ϕ	75	71	67	62,5	58	52,5	46,5	39	29	21
$\frac{R}{C} f_a$	10,76	5,21	3,40	2,50	1,96	1,60	1,31	1,04	0,730	0,517
Q/(LCV)	0,0538	0,104	0,153	0,199	0,243	0,285	0,329	0,369	0,406	0,422
$\bar{\mathcal{C}}_a$	19,25	19,22	19,65	20,49	21,95	24,46	28,29	35,01	51,05	73,12

"Palier long" : L/D ≥4

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
S	0,247	0,123	0,0823	0,0628	0,0483	0,0389	0,0297	0,0211	0,0114	0,00605
ϕ	69	67	64	62	58	54	49	42	32	23
$\frac{R}{C} f_a$	5,02	2,61	1,84	1,47	1,25	1,10	0,98	0,852	0,658	0,494
$\bar{\mathcal{C}}_a$	19,54	19,85	20,68	22,03	24,03	26,89	31,39	38,80	55,42	78,42

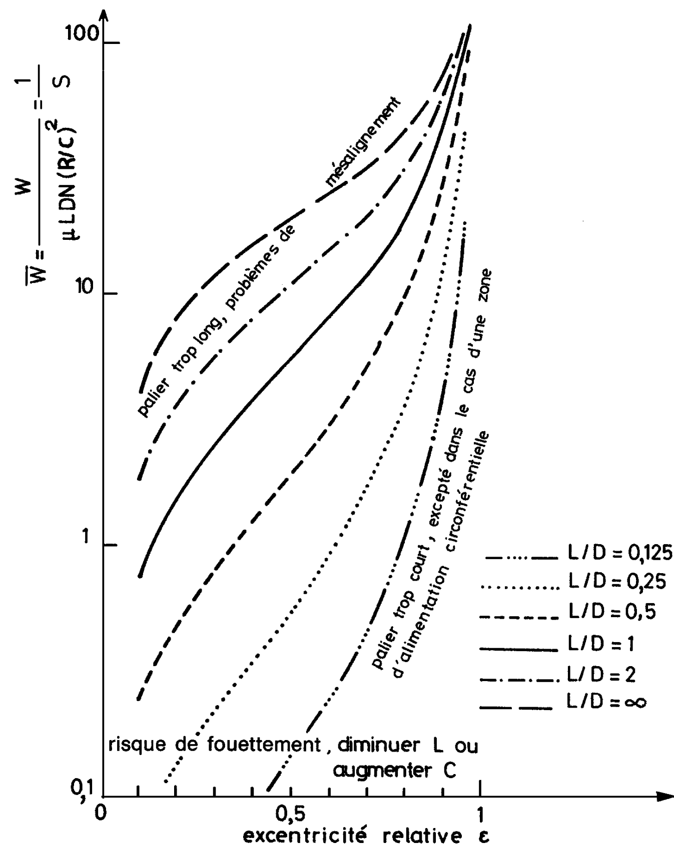


Fig.9 : Variation de la charge en fonction de l'excentricité

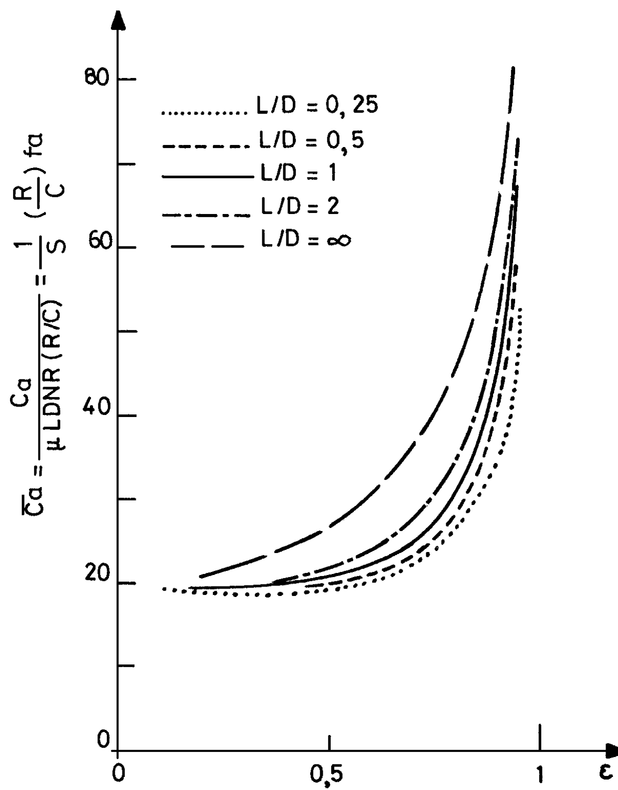


Fig.10 : Variation du couple de frottement sur l'arbre en fonction de l'excentricité

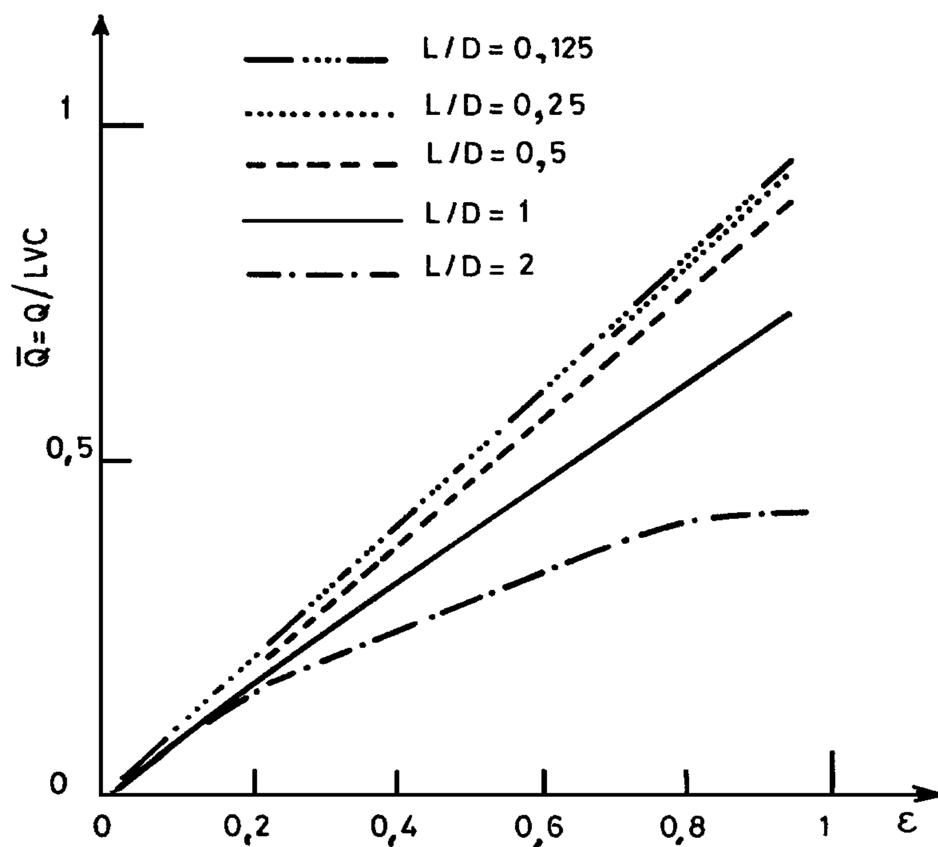


Fig. 11 : Débit axial en fonction de l'excentricité

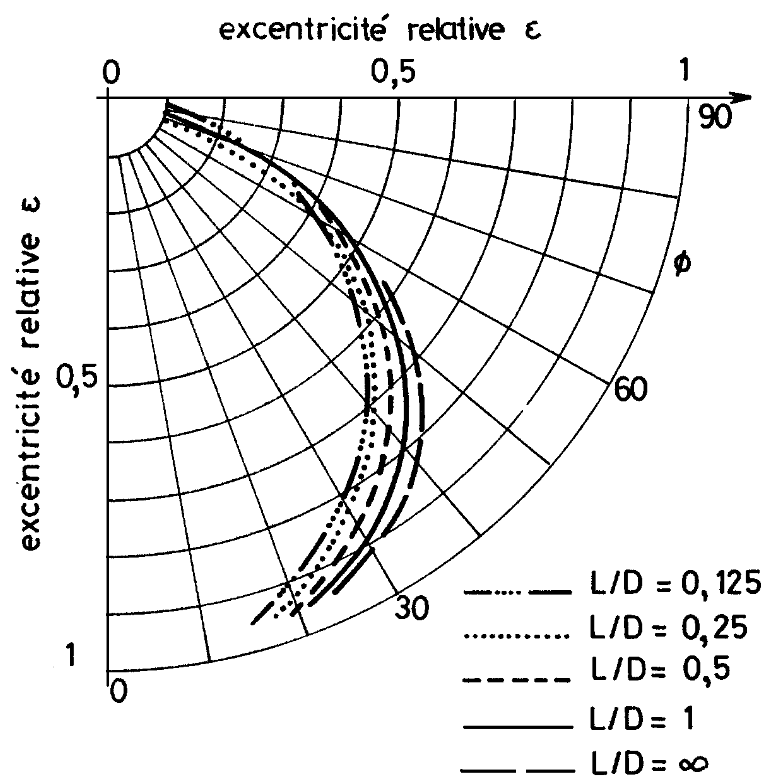


Fig.12 : Angle de calage

6 - EFFET THERMIQUE GLOBAL

L'hypothèse d'une viscosité constante en tout point de l'écoulement est erronée car on sait que la température est variable. La répartition de température à l'intérieur du film peut être obtenue en résolvant simultanément l'équation de l'énergie, l'équation de Reynolds généralisée et les équations de conduction de la chaleur dans l'arbre et le coussinet. La résolution de ce problème tridimensionnel n'a été envisagée qu'à partir des années 1960 et une solution satisfaisante à ce problème n'a été donnée qu'à partir des années 1980 [15]. Historiquement, et pratiquement, on a introduit le concept de "viscosité effective" qui consiste à supposer le régime isotherme et la température égale à $T_f = T_e + \Delta T$, où T_e est la température d'entrée du lubrifiant et ΔT l'accroissement de température obtenu en égalant un pourcentage de l'énergie générée par cisaillement à la quantité de chaleur évacuée par le lubrifiant :

$$P = \lambda\, \mathcal{C}_a\, \omega = \rho\, C_P\, Q\, \Delta T$$

où λ est un paramètre fixé : $0{,}5 < \lambda \leq 1$ qui rend compte de l'environnement du palier. Pour un écoulement adiabatique $\lambda = 1$. On prend souvent $\lambda = 0{,}85$. Cela signifie que 85% de la chaleur est évacuée par le fluide et 15% par l'arbre et le coussinet. Comme, pour une charge donnée, le couple et le débit sont fonction de la viscosité du lubrifiant, l'équation ci dessus doit être résolue de manière itérative. Le processus est précisé fig. 13.

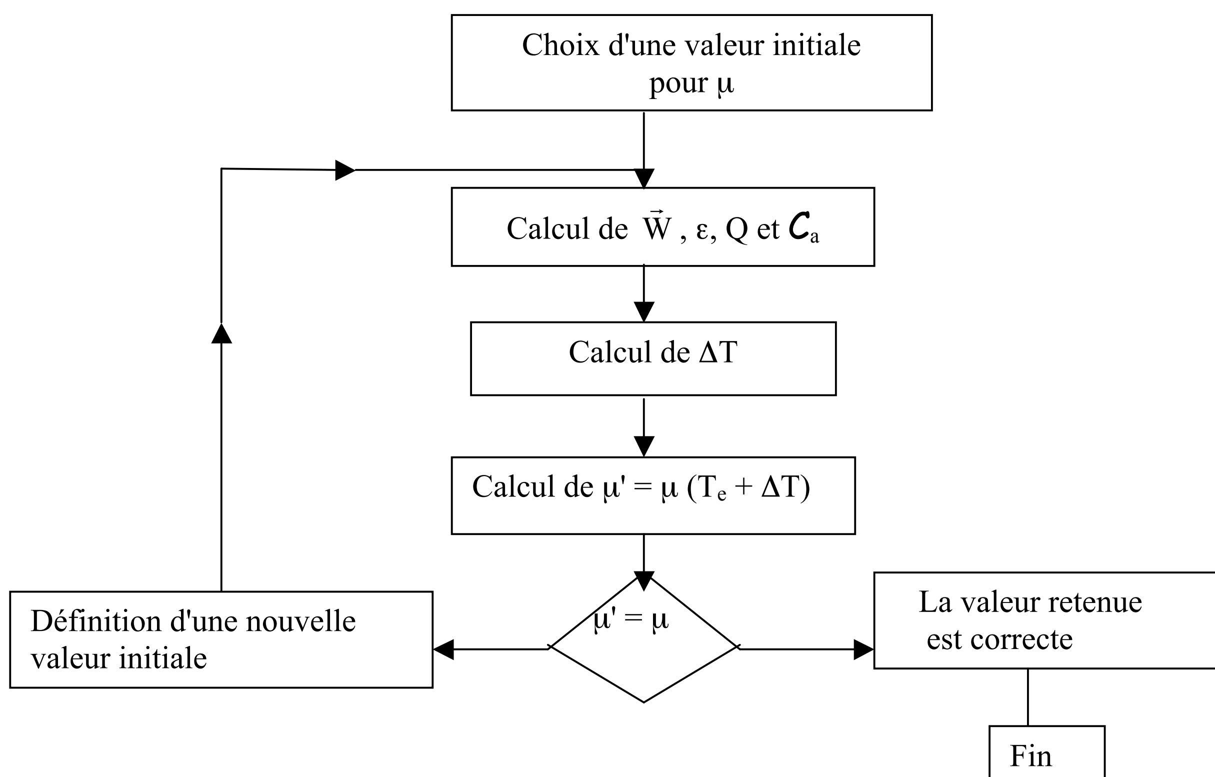


Fig. 13 : Calcul de la viscosité effective

La convergence de ce processus itératif dépend de la valeur de T_e, de la forme de la relation $\mu(t)$, du couple et du débit. Lorsque le processus diverge, on peut introduire un coefficient de pondération σ (sous relaxation $0 < \sigma < 1$) et écrire [16] :

$$\Delta T^{(n+1)} = (1 - _)\, \Delta T^{(n)} + _\ (_\, \mathcal{C}_a\, _)/(_\, C_p\, Q)$$

En pratique, une valeur de σ égale à 0,5 et une valeur initiale nulle pour ΔT assurent une convergence rapide. Cette méthode a été introduite dans un grand nombre de processus automatiques de calcul sur ordinateur.

Cette approche ne permet pas de déterminer la température maximale de surface du palier. Certains auteurs [17] proposent d'utiliser pour cette valeur la relation empirique :

$$T_{max} = T_e^0 + 2\,\Delta T$$

Si la température maximale ainsi calculée est proche de la température limite admissible, une analyse thermique plus précise du palier doit être effectuée.

7 - APPLICATION AU CALCUL D'UN PALIER LISSE

Soit un palier lisse lubrifié avec une huile dont la viscosité, la masse volumique et la capacité calorifique à la température de fonctionnement, sont respectivement :

viscosité $\mu = 0{,}015$ Pa.s.
masse volumique $\rho = 860$ kg/m³
chaleur massique $C_P = 2000$ J/kg C°

Les dimensions du palier sont :

longueur L = 100 mm
rayon R = 50 mm
jeu radial C = 0,075 mm

la charge appliquée est W = 50 000 N.
et la vitesse de rotation N = 50 tr/s.

Pour ces conditions, le rapport L/D = 1 et le nombre de Sommerfeld est :

$$S = \frac{\mu\, L\, D\, N}{W}\left(\frac{R}{C}\right)^2 = 0{,}0666$$

la vitesse linéaire d'un point appartenant à la surface de l'arbre est donnée par:

$$V = R\,\omega = 15{,}71 \text{ m/s}$$

Après interpolation dans le tableau 2, on obtient :

- excentricité relative : $\varepsilon = 0{,}733$
- angle de calage : $\phi = 41{,}3°$
- nombre de frottement : $f_a \dfrac{R}{C} = 1{,}794$
- couple sans dimension : $\overline{\mathcal{C}}_a = 27{,}63$
- débit sans dimension : $\overline{Q} = 0{,}569$

On en déduit :

- L'épaisseur minimale du film : $h_{min} = C\,(1 - \varepsilon) = 20\ \mu m$
- le couple de frottement : $\mathcal{C}_a = 6{,}9$ m N
- le débit axial : $Q = 67\ \ 10^{-6}\ \ m^3/s$.
- la puissance dissipée : $P = \mathcal{C}_a\,\omega = 2140$ W

Si l'on suppose que 85% de cette puissance a été évacuée par le fluide ($\lambda = 0{,}85$) l'échauffement moyen de l'huile est de :

$$\Delta T = _P/(_\ C_p\,Q) = 15{,}8\ °C$$

Cela signifie que la température d'entrée du lubrifiant est d'environ 16° inférieure à celle correspondant à la viscosité utilisée pour les calculs.

Les solutions analytiques données par les approches du "palier court" et du "palier long", conduisent aux résultats dimensionnés suivants (tableau 3):

Tableau 3 : Comparaison entre "palier court", "palier long" et palier de longueur finie

	L/D = 1	"Palier court"	"Palier long"
excentricité relative	0,733	0,59	0,38
angle de calage	41,3°	46,2	63,6
nombre de frottement	1,794	1,34	1,54
couple sans dimension	27,63	19,9	21,8
débit sans dimension	0,569	0,59	-

On constate que les erreurs peuvent être très importantes, particulièrement sur l'excentricité relative, c'est à dire sur l'épaisseur minimale du film et sur l'angle de calage qui sont fortement surestimés. Elles restent modérées pour le couple de frottement, et pratiquement négligeables sur le débit dans le cas du palier court.

8 - COMPARAISON THEORIE - EXPERIMENTATION

Les méthodes de calcul isothermes ne peuvent être vérifiées qu'en utilisant de l'eau comme lubrifiant ou pour des conditions de fonctionnement pour lesquelles l'énergie dissipée par cisaillement est faible et conduit à un échauffement et une diminution de viscosité peu importantes.

Des essais ont été réalisés à l'INSA de Lyon [18] avec des paliers circulaires de diamètre 50 mm, lubrifiés à l'eau. On obtient une bonne corrélation entre les valeurs mesurées et calculées, fig. 14 à 15

Des écarts significatifs sont constatés même pour des paliers de faible diamètre lorsque les hypothèses de calcul ne sont plus vérifiées. Les méthodes de calcul isothermes ne

conduisent pas à une bonne corrélation avec les résultats expérimentaux. C'est le cas, par exemple, pour une lubrification à l'huile, des résultats obtenus par DUBOIS et OCVIRK [16] pour un palier circulaire de diamètre 35 mm (fig. 16 et 17).

.

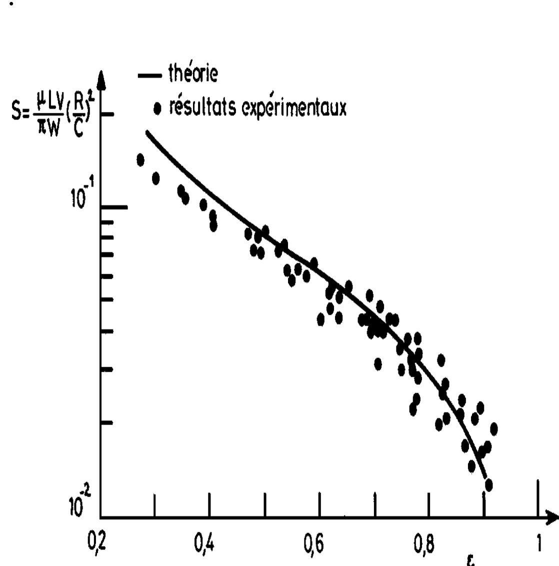


Fig. 14a : Palier long

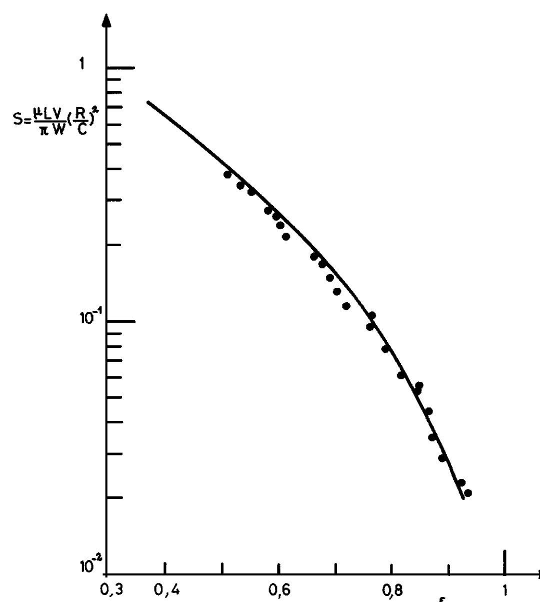


Fig. 14b : Palier court

Fig. 14 : Variations du nombre de Sommerfeld avec l'excentricité d'après [15]

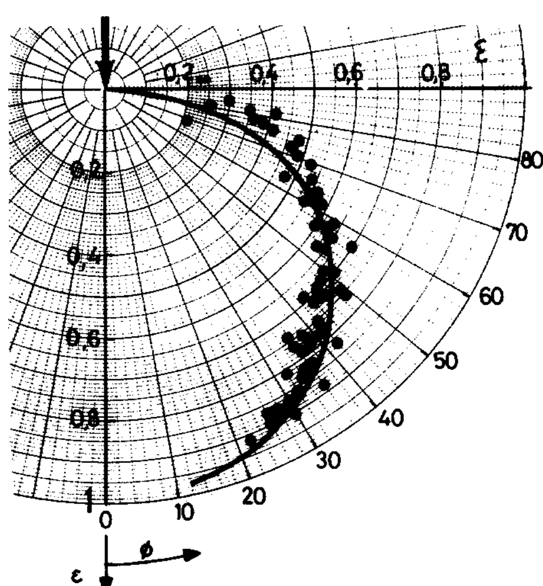


Fig. 15a : Palier long

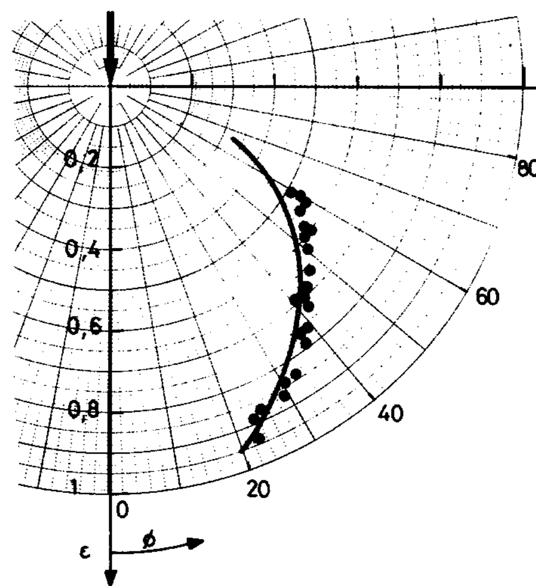


Fig. 15b : Palier court

Fig. 15 : Variations de l'angle de calage avec l'excentricité d'après [15]

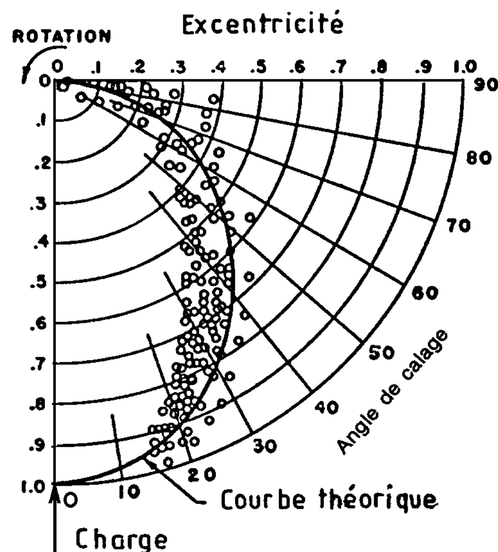


Fig. 16 : Angle de calage d'après [16]

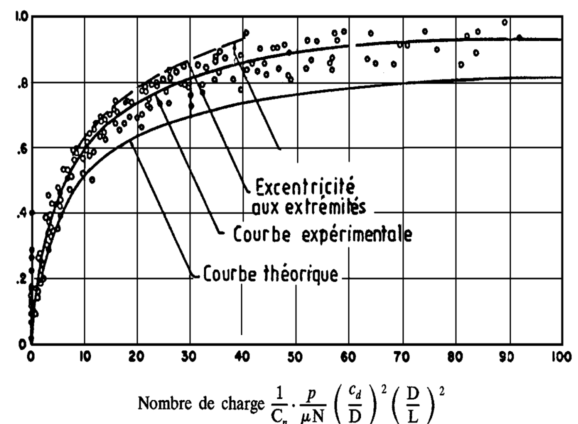


Fig. 17 : nombre de charge d'après [16]

BIBLIOGRAPHIE

Une partie de ce chapitre a été publiée par Techniques de l'Ingénieur : J. FRENE, "Paliers hydrodynamiques", B 671 et B 671,1 (1982) complété et réédité en 1997.

1 - Sommerfeld A. "Zur hydrodynamischen theorie der schiermittelreibung" Z. angew. Math. Phys., 50, p. 97-155, 1904.

2 - SWIFT H.W. "The stability of lubricating films in journal bearings". Proc. Inst. Civil Eng., 233, Pt 1, pp. 267-322, 1931-1932.

3 - STIEBER W. "Das Schwimmlager", Krayn, VDI, 1933, Berlin.

4 - Ocvirk F.W., Dubois G.B. "Analytical derivation and experimental evaluation of short bearing approximations of full journal bearing". NACA, Tech. rep. 1157, 1953.

5 - Booker J.F., "a table of the journal bearing integrals". Trans. ASME Journal of Basic Engineering, Vol. 87, n°3, p. 533-535, 1965.

6 - Bayada G. "Modelisation of a cavitation problem". Euromech Colloquium, n°124, Orbassano, Italy, oct. 2-4, 1979.

7 - Bayada G. et Chambat M. "Problèmes à frontière libre en lubrification hydrodynamique : étude monodimensionnelle". S.A.N.T.I. Université Claude Bernard, Lyon I, n°79-2, sept. 1979.

8 - El Alaoui Talibi M. "sur un problème à frontière libre associé à la modélisation de la cavitation en mécanique des films minces". thèse de Doctorat, Lyon, 26 sept. 1986.

9 - Michell A.G. "Progress in fluid film lubrification". Trans. ASME, 51, M.S.P. 51. 21., p. 153-163, 1929.

10 - Warner P. "Static and dynamic properties of partial journal bearings". Jour. of Basic Eng., Trans. ASME, Series D, 85, p. 247-257, 1963.

11 - Falkenhagen G.L., Gunter E.J. and Shuller F.L. "Stability and transient motion of a vertical three-lobe bearing system". Journal of Eng. for Ind., Trans. ASME, Series B 99, p. 665-677, 1972.

12 - Barret L.E., Allaire P.E. and Gunter E.F. "A finite length bearing correction factor for short bearing theory". Trans. ASME, jour. of Lub. Tech., Series F, Vol. 102, n°3, July 1980, p. 283-290.

13 - Black H.F. and Brown R.D. "Fast dynamic calculations for non-circular bearings". Tribology conv. I. Mech. E. Druham, 1978, p. 41-46.

14 - Rohde S.M. and Li D.F. "A generalized short bearing theory". Trans. ASME, Journal of Lubrification Technology, Series F, Vol. 102, n°2, July 1980, p. 278-282.

15 - Rohde S.M. "Computational techniques in the analysis and design of fluid film bearing". Research publication, General Motors Corporation, Warren Michigan, GMR 2279, 1976.

16 - E.S.D.U. "Journal bearing calculations". ITEM - 66023 - Inst. of Mech. Engineers.

17 - Les paliers à patins oscillants. Comportement dynamique. Aspects expérimentaux. Rapport n°4. contrat de recherche EDF - INSA, Laboratoire de Mécanique des Contacts, décembre 1980.

18 - Dubois G.B. and Orvirk F.W. "The short bearing approximation for plain journal bearings". Transaction of the ASME, November 1955, p. 1173.

ANNEXE 1

Calcul des intégrales du type [5] :

$$I_n^{\ell m} = \int \frac{\sin^\ell \theta \cos^m \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^n} \, d\theta$$

avec $0 < \varepsilon < 1$

Ces intégrales s'écrivent :

$$I_n^{00} = \frac{1}{(n-1)(1-\varepsilon^2)} \left(\frac{-\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^{n-1}} + (2n-3) I_{n-1}^{00} - (n-2) I_{n-2}^{00} \right) \; n \neq 1$$

$$I_1^{00} = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \text{ Arc tg } \left\{ \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \text{ tg } \frac{\theta}{2} \right\}$$

$$I_2^{00} = \frac{1}{1-\varepsilon^2} \left[\frac{-\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)} + I_1^{00} \right]$$

$$I_3^{00} = \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)^2} \left[\frac{-\varepsilon \sin \theta (4 + 3\varepsilon \cos \theta - \varepsilon^2)}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} + (4\varepsilon^2 - 1) I_1^{00} \right]$$

$$I_n^{01} = \frac{1}{\varepsilon} \left[-I_n^{00} + I_{n-1}^{00} \right]$$

$$I_n^{02} = \frac{1}{\varepsilon^2} \left[I_n^{00} - 2 I_{n-1}^{00} + I_{n-2}^{00} \right]$$

$$I_n^{03} = \frac{1}{\varepsilon^3} \left[-I_n^{00} + 3 I_{n-1}^{00} - 3 I_{n-2}^{00} + I_{n-3}^{00} \right]$$

$$I_n^{10} = \frac{1}{(n-1)\varepsilon (1 + \varepsilon \cos \theta)^{n-1}} ; \quad \text{pour } n \neq 1$$

$$I_n^{10} = -\frac{1}{\varepsilon} \ell n (1 + \varepsilon \cos \theta); \quad \text{pour } n = 1$$

$$I_n^{11} = \frac{1}{\varepsilon}\left[-I_n^{10} + I_{n-1}^{10}\right]$$

$$I_n^{12} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[I_n^{10} - 2\,I_{n-1}^{10} + I_{n-2}^{10}\right]$$

$$I_n^{13} = \frac{1}{\varepsilon^3}\left[-I_n^{10} + 3\,I_{n-1}^{10} - 3\,I_{n-2}^{10} + I_{n-3}^{10}\right]$$

$$I_n^{20} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[-\left(1-\varepsilon^2\right)I_n^{00} + 2\,I_{n-1}^{00} - I_{n-2}^{00}\right]$$

$$I_n^{21} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\left(1-\varepsilon^2\right)I_n^{00} - \left(3-\varepsilon^2\right)I_{n-1}^{00} + 3\,I_{n-2}^{00} - I_{n-3}^{00}\right]$$